-EXERCICE 14.2-

• ENONCE :

« Choc élastique non frontal entre 2 particules »

• Une particule (M_1) de masse m_1 est animée d'une vitesse $\vec{v}_1$ dans le référentiel du laboratoire (R_0), supposé galiléen.

• Elle entre en collision avec une particule (M_2), de masse m_2, immobile dans (R_0) : le choc est considéré comme **élastique**.

• Après le choc, les vitesses des particules, notées $\vec{v}_1^{\,'}$ et $\vec{v}_2^{\,'}$, font respectivement les angles θ_1 et θ_2 avec le vecteur $\vec{v}_1$.

1) Déterminer la vitesse $\vec{v}_G$ du référentiel barycentrique (R_G), ainsi que les vitesses dans ce référentiel des particules avant et après le choc, en fonction des vitesses dans (R_0) : on notera respectivement $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_1^{\,'}$ et $\vec{u}_2^{\,'}$ ces vitesses.

2) En appliquant les relations de conservation dans le référentiel (R_G), calculer les modules de ces vitesses en fonction de $v_1 = \|\vec{v}_1\|$.

3) On peut remarquer qu'il n'y a pas assez d'équations pour déterminer complètement les **vecteurs** $\vec{v}_1^{\,'}$ et $\vec{v}_2^{\,'}$ (ou $\vec{u}_1^{\,'}$ et $\vec{u}_2^{\,'}$) : il faudrait en outre « modéliser » l'interaction de contact des particules (M_1) et (M_2).

En revanche, on peut se fixer l'angle θ que fait la vitesse $\vec{u}_1^{\,'}$ avec $\vec{u}_1$: exprimer alors θ_1 et θ_2 en fonction de θ.

4) Pour $m_1 = m_2$, calculer la valeur de $\theta_1 + \theta_2$, qui représente l'angle que font entre eux les vecteurs vitesses après le choc.

• CORRIGE :

«Choc élastique non frontal entre 2 particules »

1) Par définition du référentiel barycentrique, on a :

$$(m_1+m_2)\vec{v}_G = m_1\vec{v}_1 + \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{v}_G = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1}$$

• La loi de composition galiléenne des vitesses donne :

$$\boxed{\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_G = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_1} \quad (1) \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{u}_2 = \vec{0} - \vec{v}_G = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1} \quad (2)$$

Rq : on vérifie que l'on a bien $m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = \vec{0}$.

• Par ailleurs : $\boxed{\vec{u}_1^{\,'} = \vec{v}_1^{\,'} - \vec{v}_G}$ (3) et $\boxed{\vec{u}_2^{\,'} = \vec{v}_2^{\,'} - \vec{v}_G}$ (4)

2) La **conservation de la quantité de mouvement** appliquée dans (R_G) fournit :

$$m_1\vec{u}_1^{\,'} + m_2\vec{u}_2^{\,'} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = \vec{0} \qquad (5)$$

• Le choc étant élastique, il y a également **conservation de l'énergie cinétique**, ce qui conduit à :

$$\frac{1}{2}(m_1u_1^{'2} + m_2u_2^{'2}) = \frac{1}{2}(m_1u_1^2 + m_2u_2^2) \qquad (6)$$

• La relation (5) permet d'écrire : $\vec{u}_2^{\,'} = -\frac{m_1}{m_2}\vec{u}_1^{\,'}$; en reportant ce résultat, ainsi que les expressions (1) et (2), dans la relation (6), on aboutit après calculs à :

$$\boxed{u_1^{'} = \|\vec{u}_1^{\,'}\| = u_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}v_1} \qquad \text{et} \qquad \boxed{u_2^{'} = \|\vec{u}_2^{\,'}\| = u_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1}$$

Rq1 : les modules des vitesses se conservent dans le référentiel (R_G).

Rq2 : lors des calculs, on tombe sur : $\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}\mu v_1^2$, avec $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$.

On retrouve ainsi la notion de « **mobile fictif** » (animé dans (R_G) de la vitesse relative des 2 particules réelles, soit ici : $\vec{v}_1 - \vec{0} = \vec{v}_1$) et de « **masse réduite** » μ : dans (R_G), le mobile fictif, affecté de la masse réduite, a effectivement la même énergie cinétique que le système des 2 particules réelles.

3) On projette les relations (3) et (4) sur 2 axes : l'un parallèle à $\vec{v}_1$, l'autre lui étant perpendiculaire. On obtient les quatre relations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{m_2}{m_1+m_2}v_1\times\cos\theta = v_1^{'}\cos\theta_1 - \dfrac{m_1}{m_1+m_2}v_1 \\ \dfrac{m_2}{m_1+m_2}v_1\times\sin\theta = v_1^{'}\sin\theta_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}v_1\times\cos\theta = v_2^{'}\cos\theta_2 - \dfrac{m_1}{m_1+m_2}v_1 \\ -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}v_1\times\sin\theta = v_2^{'}\sin\theta_2 \end{cases}$$

• On en déduit :

$$\boxed{\tan\theta_1 = \frac{m_2\sin\theta}{m_1+m_2\cos\theta}} \quad \text{et} \quad \boxed{\tan\theta_2 = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}}$$

4) Lorsque les masses m_1 et m_2 sont égales, il vient :

$$\tan\theta_1\times\tan\theta_2 = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\times\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_1+\theta_2 = \frac{\pi}{2}}$$

$\Rightarrow$ après le choc, les vecteurs vitesses des particules sont **perpendiculaires** entre eux.